Павел Полуян (г. Красноярск, Россия)

ЧИСЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

I. ПРЕВРАЩЕНИЕ 4-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В КВАРТЕРНИОННОЕ ВРЕМЯ-ПРОСТРАНСТВО.

II. ВРАЩЕНИЕ КАК ФОРМА ДВИЖЕНИЯ, НЕРЕДУЦИРУЕМАЯ К ПРЯМОЛИНЕЙНОМУ.

III. НЕПРЕРЫВНЫЙ КОНТИНУУМ И ЧИСЛОВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

ОТ АВТОРА: На прошедшей недавно международной математической конференции "Многомерный комплексный анализ" (International Conference "Multidimensional Complex Analysis", Krasnoyarsk, Russia, August 5-10, 2002) я представил внепрограммный доклад "Существуют ли гипердействительные числа в квантово-релятивистской вселенной?" Доклад был посвящен обширной теме "Нестандартный анализ неклассического движения", на первый план выдвигались математические и методологические аспекты проблемы, связанные с обоснованием нестандартной модели анализа А.Робинсона и расширением поля действительных чисел.

Предлагаемая здесь работа адресована в первую очередь физикам, - математические аспекты вынесены за скобки, а физическое содержание конкретизировано. Автор рекомендует заинтересовавшимся читателям обратиться к электронным версиям "Нестандартный анализ неклассического движения. Существуют ли гипердействительные числа в квантово-релятивистской вселенной?", "Время и хронометрика. Ареальные множества", которые представлены на русском и английском языках в Интернете (на сервере Красноярского государственного университета
www.krasu.ru - http://res.krasu.ru/non-standard, а также на
www.sciteclibrary.ru - http://sciteclibrary.ru/catalog/pages.3556.html,
http://sciteclibrary.ru/eng/catalog/pages/3773.html)

Пользуясь случаем, автор благодарит математиков и физиков, высказавших в беседах и по e-mail свои критические и конструктивные комментарии к поставленной проблеме.

I.

Один из научных текстов Вольфганга Паули начинается примечательной фразой: "Введем, как обычно, вещественные координаты $\mathbf{X_k}$ для пространства и мнимую координату $\mathbf{X_4} = \boldsymbol{i}\mathbf{Ct}$ для времени, и рассмотрим преобразования Лоренца..." *(В.Паули. Труды по квантовой теории. М.: "Наука", 1977, в статье "К математической теории матриц Дирака", п.5 "Преобразование Лоренца волновых функций Дирака", с. 233.).* Словесный оборот "как обычно" можно расценить в качестве остроумной интеллектуальной провокации, подразумевающей, что указанную процедуру можно сделать и "необычным" путем. Как? Не трудно сказать: мы попробуем для времени оставить вещественную координату, а 3 пространственные координаты представим как мнимые. Тогда 4-мерный псевдоевклидовый континуум Минковского превратится в некое необычное многообразие, которое мы далее будем называть "квартернионное время-пространство".

Появление здесь термина "квартернион" понятно: четверку чисел, выражающих координаты, - одно вещественное и три мнимых - легко представить в качестве квартерниона. Однако квартернионы - это алгебраические числа, а 4-х мерное пространство-время - это континуум. Если так, то существуют ли достаточные основания для того, чтобы ставить их в соответствие? К этому вопросу мы вернемся несколько позже, а пока будем расценивать квартернионное время-пространство как некую чисто логическую конструкцию, - таковую можно рассмотреть в общем и проанализировать в частностях. Попутно отметим, что в современной науке термин "пространство" уже не связывается однозначно только с мерой расстояния, и ничто не мешает нам составить 4-мерное псевдоевклидово пространство индекса 3, где на осях откладывается мера в размерности [t]. Но поскольку время - это физический параметр, отражающий важнейший аспект реальности, то нас в данной статье будет интересовать в первую очередь не формально-математические свойства полученной конструкции, а ее физическая интерпретация.

То, что алгебра квартернионов некоммутативна - сразу же наводит на мысль: полученный таким образом абстрактный объект имеет прямое отношение к квантово-механическим особенностям физического мира. Однако мы не станем забегать вперед, будем рассматривать квартернионное время-пространство таким образом, как если бы мы ничего еще не знали о существовании квантовой механики. Иными словами, постараемся пока сохранить в неприкосновенности классические представления о течении времени и протяженности пространства.

Итак, мы имеем перед собой 4-мерное многообразие, где вещественная ось - чистое время, а три другие - это пространственные координаты, превращенные в мнимые временные оси. При построении 4-мерного псевдоевклидового континуума Минковского все четыре координаты были выражены в одной мере [x], что достигалось с помощью умножения временной координаты на коэффициент **C** - скорость света [м/с]. Поэтому в нашем квартернионном время-пространстве одноразмерность получается аналогичным путем: мнимые пространственные координаты должны быть умножены на некий коэффициент **S** с размерностью [с/м]. Можно было бы сказать, что это "обратная скорость света", но это не так. Обратная скорость света **1/C**, как реальная физическая величина не может быть искомым коэффициентом, поскольку шкала обратных скоростей неравномерна. В классическом представлении скорость - это отношение, где в числителе отрезок расстояния, а в знаменателе период времени - времени как независимой переменной. Тогда для "обратной скорости", где числитель и знаменатель меняются местами, вместе с обращением размерности возникает и неравномерная шкала величин: 1[м/с]=1[с/м], 2[м/с]=1/2[с/м], 3[м/с]=1/3[с/м], 4[м/с]=1/4[м/с] и т.п. Создается впечатление, что по этой причине квартернионное время-пространство не может быть аналогом 4-мерного континуума. Однако выход из тупика легко обнаружить, если не считать коэффициент **S** "обратной скоростью" – это просто некий коэффициент с размерностью [с/м].

Здесь мы от математики должны обратиться к физике. Если коэффициент **C** в псевдоевклидовом континууме Минковского - это вполне конкретная физическая величина, скорость света, имеющая в разных системах отсчета конкретное численное значение, то в нашем квартернионном время-пространстве коэффициент **S** также должен быть ничем иным как некой физической величиной - константой, отличной по сути своей от скорости света, но имеющей размерность [с/м] - обратную размерности скорости. На роль такой константы можно выдвинуть комбинацию констант $\mathbf{h/e^2}$, где **h** - постоянная Планка, а **e** - заряд электрона. Хорошо известно, что эта комбинация констант наряду с **C** входит в выражение безразмерной постоянной тонкой структуры $\mathbf{1/\alpha} = \mathbf{\hbar C/e^2} = 137{,}0306...$ (здесь $\hbar$ – постоянная Планка, деленная на два "π" – $\mathbf{h/2\pi}$). Я полагаю, что так оно и есть: квартернионное время-пространство - это математическое выражение реального аспекта микрофизической реальности, где константа $\mathbf{S=h/e^2}$ с размерностью [с/м] столь же важна, как важна скорость света для глобального 4-мерного континуума Минковского.

Приняв эту трактовку, мы тем самым перекидываем логический мостик между квантовой и релятивистской физикой, обнаруживая - пока только формально-математически - глубокую связь между глобальной пространственно-временной картиной мира и микрофизической квантовой реальностью. Таким образом, логический смысл безразмерной постоянной тонкой структуры выражается в том, что она показывает соответствие между континуумом Минковского и квартернионным время-пространством. Я полагаю, что Вольфганг Паули, который настаивал на теоретическом обосновании физического статуса этого загадочного числа 137,0306..., имел в виду нечто подобное.

Однако формальных аргументов здесь не достаточно. Мы должны вскрыть и физическую суть обнаруженного соответствия, то есть увидеть связь между граничной скоростью прямолинейного поступательного движения **C** и константой **S**, смысл которой пока не понятен. $\mathbf{S=h/e^2}$ - это комбинация эмпирических констант с размерностью [с/м], мы включили ее в некую математическую структуру, но от этого ее смысл не стал яснее.

В классической физике скорость является количественной мерой поступательного движения, связывает между собой пространственные и временные параметры движения как прямолинейного поступательного перемещения. Если константа **S** включается нами в квартернионное время-пространство, она также должна пониматься как выражение какого-то аспекта движения, где пространственные и временные характеристики как-то связаны между собой. Более того, важнейшим свойством континуума Минковского являются преобразования Лоренца, приводящие к тому, что закон сложения скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой дает предельное значение для прямолинейного поступательного перемещения. Логично предположить, что в квартернионном время-пространстве также обнаружится аналог преобразований Лоренца, который позволит трактовать константу **S** в качестве инварианта и предела в сложении каких-то величин. Так, по крайней мере, должно выглядеть дело в двумерном случае, где на комплексной плоскости псевдоевклидовым образом связываются одна временная и одна пространственная оси. Для континуума Минковского мнимой будет временная ось - ***i*Ct**, а для квартернионного время-пространства - пространственная ***i*Sx**. В двумерном случае дело облегчается тем, что мы оставляем за рамками рассмотрения некоммутативность (с другой стороны, обнаруживается, что некоммутативность связана напрямую с наличием еще двух мнимых пространственных координат).

Поскольку скорость света **C** - это неклассическое ограничение на максимальную скорость (скорость распространения сигнала на расстояние не может быть бесконечной), соответственно, константа **S** также не позволяет отношению $\Delta t/\Delta x$ принимать бесконечные значения. Однако **S** - это предел для "обратной скорости", а увеличение $\Delta t/\Delta x$ одновременно означает уменьшение отношения $\Delta x/\Delta t$, что позволяет предположить: "нулевая скорость" столь же недостижима, как и бесконечная.

Тем не менее, и в случае упрощенного двумерного, комплексного представления квартернионного время-пространства, все-таки, остается пока непонятным: что за величины должны здесь складываться, и каков в данном случае физический смысл "системы отсчета"? На эти вопросы нам сейчас и предстоит ответить.

Поскольку **S** - это некий коэффициент пропорциональности между мерой времени **t[c]** и мерой расстояния **x[м]**, то константа **S** как самостоятельный параметр выражает некий аспект движения, но, поскольку для поступательного прямолинейного перемещения количественной мерой является классическое понятие скорости **V[м/c]** и ее неклассический предел **C**, эта новая константа **S** должна быть неклассическим пределом какой-то вполне классической меры движения, которая тем не менее не является поступательным перемещением. Мы предположим, что искомой формой движения является вращение. *

** Существуют и микрофизические предпосылки, для того, чтобы связать указанную величину именно с вращением. Так, например, в физике элементарных частиц экспериментально определено существование так называемых изотопических преобразований, которые полностью аналогичны обычным вращениям. Вернер Гейзенберг, перечисляя основные группы симметрии, рядом с группой Лоренца помещает особую группу - это "группа, исследованная Паули и Гюши, которая соответствует по своей структуре группе трехмерных пространственных вращений - она ей изоморфна, - и проявляет себя в появлении квантового числа, которое эмпирически было открыто у элементарных частиц и получило название "изоспин". ("Квантовая теория и строение материи", в кн. В.Гейзенберг, "Физика и философия. Часть и целое.", М.: "Наука", 1990, с. 103.) При этом, соотношения, следующие из изотопической инвариантности соблюдаются с точностью до поправок, величина которых определяется константой* $e^2/\hbar C$. *В учебной литературе отмечается, что "изотопическая инвариантность означает особую симметрию сильных взаимодействий, не связанную с общими свойствами пространства и времени. Хотя изотопическая инвариантность достаточно хорошо установлена экспериментально, связанные с нею свойства симметрии логически не вытекают из существующей теории и природа этих свойств симметрии пока не выяснена". ("Изотопический спин", в кн. "Физический энциклопедический словарь", М., 1962, т. 2, с. 143.)*

II.

Итак, мы предполагаем, что специфической формой движения, которая в квартернионном время-пространстве будет вести себя аналогично обычной поступательной скорости, является именно вращение. В принципе, других вариантов у нас просто нет, ведь мы исследуем движение как некое отношение между временным и пространственным измерениями, а таких отношений может быть только два: **x/t** и **t/x**. Таким образом, мы ставим двоякую задачу: показать, что вращение - это фундаментальная форма движения, равноправная с прямолинейным поступательным, и что количественной мерой его является [с/м].

В математике ПОВОРОТ в пространстве столь же фундаментальная операция как параллельный перенос. Уместно здесь упомянуть Анри Пуанкаре, который указывал на наличие "скрытой аксиомы", которая замаскирована среди аксиом Евклида в виде постулата о прорисовке окружности циркулем. *(А.Пуанкаре, "О науке", М.: "Наука", 1983.)* То, что поворачиваемая полупрямая рано или поздно совпадает со своим продолжением логически не связано с аксиомами о статичных точках и прямых, Анри Пуанкаре показывает, что устранение этой "аксиомы" может приводить к экзотическим теориям.

Тем не менее, реальный мир устроен так, что и евклидовы и неевклидовы геометрии опираются на этот "эмпирический факт", который, как известно, выражается в конкретном иррациональном числе π. (Образно говоря, число π является своеобразной феноменологической квантовой константой, которая "почему-то" возникает в геометрии - в чисто теоретическом конструктивном построении.)

В то же время в классической механике вращение - это нечто вторичное по отношению к прямолинейному поступательному движению, то есть вращение (движение по замкнутой траектории) редуцируется к бесконечно малым прямолинейным перемещениям, поэтому скорость вращения традиционно измеряется в той же самой мере [м/с], выражаемой как число оборотов за секунду. При этом ВРЕМЯ аксиоматически берется в качестве независимой переменной, ход времени в полном согласии с ньютоновским определением - равномерно и неотвратимо отсчитывает секунды (в заданной системе отсчета).

Так вращение стандартным образом представляется как нечто, что легко можно свести к общим понятиям о прямолинейном перемещении, причем редукция выглядит естественно и логически непротиворечиво. Этого было достаточно для теоретических и практических нужд, однако развитие неклассической физики поставило новую задачу: если мы в квантовой механике используем феноменологически введенные параметры, такие как спин, вполне логично было бы попытаться найти для них основания в исходных принципах классической науки.

Такие основания есть.

Рассмотрим смысл понятийного различения инерциальных и неинерциальных систем. Ясно, что вращающаяся система - неинерциальна, соответственно, выглядело бы бессмысленным определение параметров движущейся инерциальной системы по отношению к вращающейся. Поэтому мы строим шкалу относительных поступательных скоростей, рассматривая множество исключительно инерциальных систем. С другой стороны, вращение традиционно понимается как нечто, что определимо только по отношению к покоящейся системе, то есть к инерциальной. Проще говоря: инерциальная система НЕ ВРАЩАЕТСЯ, поэтому как бы очевидно, что ВРАЩАЮЩУЮСЯ систему следует определять по отношению к ней. Но если мы поступаем ТАК, то нет ничего удивительного, что в результате математических выкладок мы получаем уже заранее заложенный в предпосылки вывод: вращение редуцируется к бесконечно малым прямолинейным перемещениям. Отталкиваясь от понятия не вращающейся системы, можно вывести много интересного, но только не понятие вращение.

Давайте, уточним - каков ход мысли, приводящий к стандартным выводам. Рассматривается множество вращающихся систем ("колес"), оси которых лежат вдоль одной прямой. Предположим, что в единицу времени они совершают некое кратное число оборотов, а расположим их так, что у двух соседних "колес" число оборотов отличается на единицу. Тогда можно принять одно из "колес" за неподвижную систему отсчета, - в обе стороны от него распределятся вращающиеся системы, направления вращений у которых противоположны, а переход от «колеса» к «колесу» в каждую из сторон будет приводить к равномерному изменению их скорости вращения относительно выбранной покоящейся системы отсчета. Понятно, также, что в качестве системы отсчета можно брать любое из «колес» – отношения между ними сохраняются.

Здесь представлен весь понятийный набор, используемый для определения поступательного (не вращательного) движения: единое время как независимая переменная, скорость точки в [м/с] (по окружности 1 оборот в единицу времени), произвольный выбор системы отсчета, неограниченное возрастание скоростей относительно выбранной.

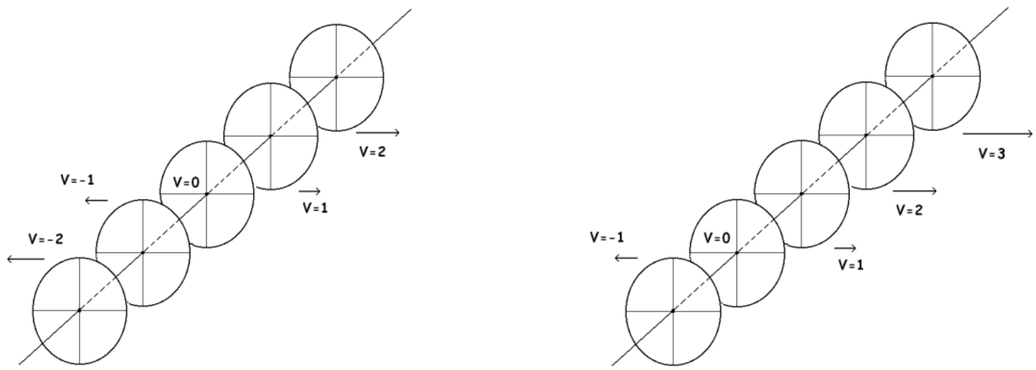


Рис. 1.

Эта методология анализа сама по себе выглядела логичной, и единственная непоследовательность – это использование инерциальной системы отсчета для определения неинерциального движения. Ведь если мыслить последовательно, то относительность вращения должна бы выводиться из сравнения исключительно таких систем, которые сами обладают ВРАЩЕНИЕМ, , подобно тому как относительность поступательных прямолинейных скоростей выводится из сравнения инерциальных систем, - оказывается просто ИЗМЕНЕНИЕМ РАССТОЯНИЯ В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ. Тем не менее, классический стандартный вывод не приводил к практическим ошибкам, теоретически был осмыслен с помощью привлечения динамических причин - прямолинейная траектория движения материальной точки искривляется внешней силой, а вращение как таковое представлено суммой бесконечно малых прямолинейных перемещений.

Поэтому напрашиваются возражения и возникают законные вопросы: есть ли вообще смысл говорить о ВРАЩЕНИИ КАК ТАКОВОМ? Ведь "совершенно очевидно": только что описанный классический подход – единственно возможный в данном случае! Если даже кинематика поступательного движения не требует динамики, следует ли из этого, что можно описать вращение "само по себе" - только на основе кинематических представлений?

Тем не менее, мы попробуем это сделать. Тем более, что в неклассической релятивистской физике понятие силы уже заменено пространственно-временными отношениями.

Условие задачи таково: мы должны определить вращение без привлечения понятия неподвижной инерциальной системы отсчета, относительно которой вращение вводится стандартным образом.

Предлагаемый здесь подход на первый взгляд выглядит странно - как можно говорить о вращении, если нет абсолютной системы отсчета – покоящейся системы, относительно которой оно осуществляется? Я полагаю, что наш подход не более абсурден, нежели представление о поступательном движении, для которого исключен неподвижный фон. Думаю, что свыкнуться с новым определением вращения будет не сложнее, чем отказаться от мирового эфира.

Выберем за основу вращающуюся систему, которая ВРАЩАЕТСЯ относительно другой системы отсчета, которая тоже ВРАЩАЕТСЯ. Мы, как уже было сказано, не имеем права как бы то ни было вводить особую систему, у которой вращение отсутствует. При этом, у нас нет не только понятия абсолютного пространства, но нет и абсолютного времени, единого для всех таких систем. То есть мы не вправе уже заранее полагать число оборотов в секунду. Соответственно: является ли параметр **t** независимой переменной - это пока проблематично. Более того, проблема эта оказывается сложней, чем для случая прямолинейного движения.

Суть дела в том, что в классической механике представление о течение времени вводилось априори, поскольку наличие периодических процессов, позволяющих определять его ход, для всех было очевидно. Исаак Ньютон в своем определении абсолютного времени легко абстрагировался от конкретных периодических процессов и ввел ход времени как таковой, - люди с помощью периодических процессов могут только фиксировать его с той или иной степенью точности. Это обстоятельство потом позволило Альберту Эйнштейну отвергнуть абстракцию абсолютного времени на основании того, что время без его измерения просто не мыслимо. Эталоном для измерения времени оказался инвариант скорости света - вполне конкретной скорости, обладающей особым инвариантным свойством. Существенно то, что **C** - это именно поступательная прямолинейная скорость.

Однако в условиях нашей задачи нет подходящего конкретного эталона, зато есть периодический процесс как таковой, ведь вращение - это модель любого периодического процесса. То есть вращение САМО ПО СЕБЕ – это периодический процесс в чистом виде, причем мерой его для данной системы отсчета является уже заданная, постоянная единица пространства – длина траектории вращения, окружности, радиуса.

Теперь представим бесконечное множество одинаковых вращающихся систем ("колес"), которые характеризуются одинаковыми мерами [м], оси которых располагаются на прямой, перпендикулярно к ней. Наше рассмотрение чисто классическое, ведь мы хотим вывести классическую характеристику вращения (которая только в неклассическом случае псевдоевклидовой плоскости проявит себя как предельная константа **S**), поэтому нет ничего удивительного, что мера расстояния будет общей для всех систем (радиус "колеса"). Эта мера в нашем случае будет играть ту же роль, что и время для множества инерциальных систем. "Одновременность" здесь будет выступать, как "синхронизация" - положение, когда радиусы "колес" лежат на общей прямой, через точки которой проходят оси.

Вот это множество вращающихся систем, расположенных на прямой так, что все они крутятся синхронно - то есть их радиусы ложатся на одну прямую одновременно ("сборка" прямой из единичных отрезков - это и есть "одновременность"). Абсолютно все они вращаются, но мы не можем определить частоту их вращения, поскольку НЕТ МЕРЫ ВРЕМЕНИ, относительно которой можно было бы задать частоту. Иными словами, с традиционной точки зрения вращающееся "колесо", выбранное за систему отсчета, может иметь любую скорость вращения, зато относительно выбранной вращение другой может быть строго определено. Понятно, что допустимой окажется и обратная операция: определение вращения системы отсчета относительно той, чье вращение измерялось первоначально.

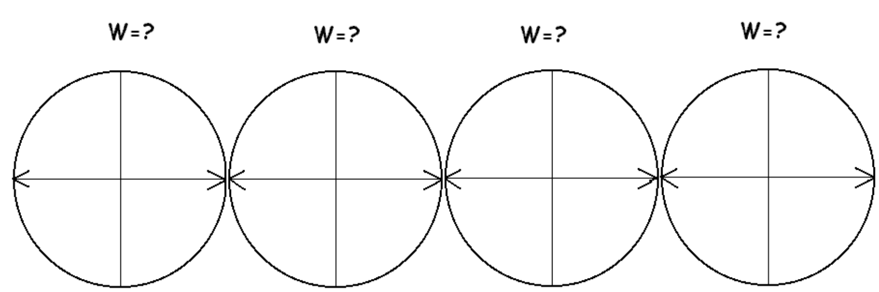


Рис. 2

Мы только что отметили, что в нашей модели нет меры времени. Зато есть другая мера - один полный оборот и длина единичного радиуса, который этот оборот совершает. Зафиксировать оборот для системы отсчета не составит труда: ведь одна система может определять свое собственное вращение относительно другой. Пусть в выбранной модели моментом отсчета для некоторой вращающейся системы является миг синхронизации, когда "совпадают" ("сходятся", "лежат напротив друг друга", "метятся одной отметкой" и т.п.) точки окончания радиусов соседних с ней "колес", оказавшиеся на базовой прямой. Если вращение продолжится, эти точки рано или поздно вновь должны совпасть. (Выражение "рано или поздно" показывает, что никакой определенной частоты вращения [обороты в секунду] - мы наперед задать не вправе, задается только необходимость будущего совпадения.)

Первое же совпадение "меток", которое будет зафиксировано в выбранной системе отсчета, означает, что система совершила один оборот. Такой оборот означает: "пройдена мера расстояния". Для системы отсчета это и есть ее период. Не важно, что соседняя система за это же время могла совершить сколь угодно много оборотов, важно то, что "метки" совпали - то есть радиус системы отсчета вновь лежит на базовой прямой. Теперь количеством этих оборотов можно измерять и вращение любой другой системе. Легко уяснить, что в этой модели независимой переменной является именно число оборотов: "метры накручиваются" совершенно так же неотвратимо и постоянно, как текут секунды времени в классической модели поступательного движения. Теперь в системе отсчета легко измерять скорость вращения любой другой системы вращения: достаточно посчитать число оборотов, сделанных на наших "часах" (система отсчета – «срелка» и соседняя, выбранная за «циферблат») до того, как с измеряемой системой отсчета возник момент синхронизации. Это число оборотов будет количеством условных единиц времени – условных секунд, ведь времени, классического, текущего само по себе, здесь нет. Есть только отсчет оборотов собственной стрелки - вращающейся системы, сделавшей один свой собственный оборот, дойдя до отметки на циферблате - на соседнем "колесе". Так идет "накручивание" условных метров – длины окружности, постоянной в данной системе для заданного радиуса (Мы не случайно именуем вращающуюся систему "колесо", поскольку определение вращения здесь может быть только локальным.)

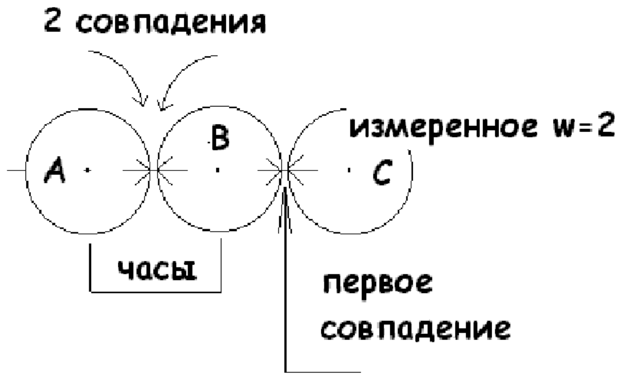
Казалось бы, мы вправе счесть, что метка, с которой наступило совпадение - это метка на колесе, которое "на самом деле" покоится, то есть его радиус все время совпадает с базовой прямой. Но, достаточно нам это предположить, как схема рушится: ведь тогда вся наша базовая прямая, образуемая совпадающими радиусами, должна вращаться вокруг такого "покоящегося колеса" - вместе со всеми лежащими на ней "колесами" и системой отсчета в придачу! Инерциальной системе в нашей модели места нет, сама базовая прямая - это не общая для всех неподвижная система отсчета, а нечто возникающее из условия "синхронизации" (аналогично в классической модели поступательного движения появляется общая, единая для всех инерциальных систем ось абсолютного времени). Значит нам, действительно, удалось избавиться от инерциальных (не вращающихся) систем, удалось найти модель, когда приходится рассматривать вращение только относительно вращений. Так выясняется, что в классической стандартной модели на самом деле сравнивались не вращения, а мгновенные скорости точек концов радиусов, каждая из которых уже заранее задавалась как прямолинейная поступательная, относительно общей для них неподвижной системы отсчета.

Таким образом, для того, чтобы можно было сравнивать между собой ТОЛЬКО ВРАЩАЮЩИЕСЯ системы, мы должны располагать их осях вращения перпендикулярных к базовой прямой, с которой совпадают вращающиеся радиусы. В ином случае, измеряя относительное вращение, мы всегда будем вынуждены считать систему отсчета инерциальной, а в результате получать определение мгновенной поступательной скорости. Если мы в физике хотим проводить четкое различие между инерциальными и вращающимися системами отсчета, иной схемы для сравнения вращений, нежели только что предложенная, придумать нельзя. Более того, стандартная схема, где можно вводить покой вращающейся системы отсчета, непригодна еще и потому, что в ней ход времени - базовый периодический процесс - вводится аксиоматически. Молчаливо предполагается, что этот процесс не входит в множество рассматриваемых вращений. Легко догадаться, что такой базовый периодический процесс-вращение - это элемент того ортогонального множества вращений, которое мы сейчас рассматриваем.

Что же мы получим, если в рамках нашего мысленного эксперимента будем строить шкалу относительных вращений? Мы должны придти к выводам, что единицу времени, отсчитываемую "часами-колесом", надо определять, исходя из того - сколько раз было зафиксировано совпадение точек на часах. Чем больше оборотов будет отмечено по нашим "часам" до момента, когда совпадение произойдет - тем большее значение для скорости вращения будет зафиксировано.

Допустим, что до момента фиксации совпадения меток с измеряемым колесом было отсчитано N оборотов "собственного времени", тогда измеряемому колесу будет приписана мера вращения в N секунд за один оборот. Если вспомнить, что оборот - это "накручивание метров", то мерой измерения скорости вращения станет [с/м]. Что же будет происходить, при переходе от одной системы отсчета к другой? Теперь "часами" для новой системы отсчета становится та, которая раньше была системой отсчета. Точно так же, как в классической модели определения прямолинейных поступательных скоростей осуществляется переход из системы отсчета в систему, чья скорость измеряется.

Рис. 3.



Легко посчитать, каким образом будут складываться вращения. Допустим, для простоты, что система отсчета B зафиксировала совпадение "меток" с измеряемой системой C за два собственных оборота, за 2 условные секунды, - тогда измеряемой системе приписана скорость в 2[с/м]. Всякий раз, по "часам" отсчитывается два оборота, прежде чем измеряемая система сделает один. (Образно выражаясь, длина "суток" системы C - один ее оборот – это 2 оборота стрелки на наших часах, где системы A и B - это циферблат и часовая стрелка. Понятно, почему люди измеряют время на Земле именно ТАК.)

Теперь пусть измеряемая система, ставшая новой системой отсчета, точно также зафиксирует такую же скорость вращения у новой системы D. Но это означает, что в первоначальной системе отсчета B скорость этой последней будет измерена уже как 4 оборота до первого совпадения меток! То есть 2[с/м]+2[с/м]=4[с/м] - в полном соответствии с арифметическим законом сложения скоростей. Фокус в том, что собственная условная секунда в системе C измеряется по отношению к B, которая, конечно, до этого совпадения уже успела сделать один собственный оборот. Но в таком "фокусе" нет ничего удивительного, ведь никакого абсолютного времени нет, есть только собственные обороты - условные секунды - которые возникают через определение совпадений меток системы отсчета с метками той, относительно которой начался отсчет оборотов.

А теперь отметим главную особенность нашей модели. Если мы строим относительность вращений по аналогии с относительностью для поступательного движения, то мы должны предположить, что две системы вращения, A и B, которые сравнивались первоначально, должны приписать друг другу равные скорости вращения. Но у нас этого вроде бы нет: мы говорим только о совпадении меток, которое позволяет системе B зафиксировать свой полный оборот. Если мыслить по аналогии, B должна тогда приписать системе A также только один оборот, но мы начали с того, что заявили: эта система A может "на самом деле" совершить и большее число, главное – чтобы метки совпали. Кроме того, читатель, наверное, уже обратил внимание, что измеряемой системе я сразу приписал скорость в 2[с/м], но, если мыслить по аналогии, мы должны были бы рассмотреть системы A, B и C, так, чтобы вращения A и C относительно центральной системы отсчета B были единичны и равны между собой.

Вспомним, как мы измеряем относительные скорости для поступательного движения: если скорость точки B относительно системы отсчета A задается единичной, а в системе B имеется точка C, движущаяся с единичной скоростью, то симметрия такова, что относительно точки B скорости A и C равны.

Рис. 4.

← A •   B•   • C →

Да, они равны по модулю, но ПРОТИВОПОЛОЖНО НАПРАВЛЕНЫ. Тогда аналогом этого симметричного случая в нашей модели станет следующая ситуация:

Рис. 5

Относительно вращающейся системы B вращательные скорости систем A и C будут единичны, но противоположно направлены: ведь синхронность совпадений меток не свидетельствует о направленности вращения! Возникает проблема: пусть у A и C скорости противоположно направлены, но в какую же сторону тогда крутится "колесо" B? Вопрос чрезвычайно интересный. Получается, что "колесу" можно приписать вращение в любую сторону! Это делает нашу модель полностью аналогичной классической схеме относительности поступательного движения. В классической схеме системе отсчета приписывался покой – нуль поступательной скорости. Нулевая скорость само по себе, безотносительно к чему либо. Аналогом этого "абсолютного самого по себе покоя" в нашей модели оказывается неопределенность направления вращения. Именно неопределенность, ведь определенность наступает только тогда, когда вводится четвертая система вращения D, теперь для выполнения правила арифметического сложения скоростей вращения система B будет иметь направление вращения в ту же сторону, что и C и D. Легко убедиться, что эта неопределенность будет возникать всякий раз, когда мы переходим в новую систему отсчета.

Смысл такой неопределенности легко понять: система ВРАЩАЕТСЯ, но направления вращений меняются в зависимости от задаваемой системы отношений. Точно также для инерциальных систем меняются местами покой и движение, в зависимости от того, что считается системой отсчета.)*

Например, в нашем случае, когда скорости C (относительно B) и D (относительно C) определяются по модулю как 2[с/м], переход из системы B в систему C приводит к тому, что скорость B относительно C также станет равной 2[м/с], но по отношению к D противоположно направленной. Однако, если ранее мы спокойно задавали направленность вращения C (в ту же сторону, что и D), то теперь ее направление вращения оказывается неопределенным. Я полагаю, что такие выводы отнюдь не свидетельствуют о порочности и противоречивости анализируемой модели, наоборот они указывают, как на базе совершенно классических представлений мы находим основания для представлений, принятых в неклассической физике. (А классическая интерпретация может быть, в частности, связана с представлением систем A и C в качестве сечений тора, который в общем случае может быть вращающимся. В связи с этим, напомню, что мы здесь рассматриваем плоский случай.)

Осталось сказать немного. Как уже ясно, при переходе от одной системы отсчета к другой идет арифметическое сложение величины [с/м] - величины скорости, определенной для вращения, понятого в качестве фундаментальной формы движения, - идет в сторону увеличения, то есть стремится к бесконечности. Точно также и поступательные скорости [м/с] в классической механике могут быть неограниченно увеличиваемы числом переходов от одной системы к последующей. Однако по смыслу ТАК ПОНИМАЕМОЙ скорости вращения, увеличение количества [с/м] - это уменьшение числа оборотов, то есть ничто иное, как замедление вращения. Если классическая кинематика поступательного движения в современной физике заменена релятивистской, где значение скорости прямолинейного распространения сигнала оказалось ограниченно верхним пределом **C**, то наша модель позволяет столь же последовательно ввести псевдоевклидовый континуум, где появляется константа **S** с размерностью [с/м], которая ограничивает возможное замедление скорости вращения. Перефразируя вышеприведенные слова Вольфганга Паули, можно сказать: "Введем, как обычно, вещественную координату $\mathbf{t_0}$ для времени и необычные мнимые координаты $\mathbf{t_1=\mathit{i}Sx_1}$, $\mathbf{t_2=\mathit{j}Sx_2}$ $\mathbf{t_3=\mathit{k}Sx_3}$ для измерений пространства, и рассмотрим преобразования чем-то похожие на преобразования Лоренца..."

** Интересно отметить, что Дж.В.Нарликр в теории конформной гравитации, рассматривая в совершенно пустой вселенной одинокую материальную точку (то есть, для нее отсутствует система отсчета), приходит к выводу, что ее состояние движения - это не нуль скорости, а неопределенность. (Дж.В.Нарликар, "Инерция и космология в теории относительности", в сб. "Астрофизика, кванты и теория относительности", М.: "Мир", 1982, с. 504. Это сборник статей к столетию А.Эйнштейна, выпущенный в Италии - "Astrofisica e cosmologia, gravitazione, quanti e relativita", Firenze, 1979.)*

III

В квартернионном время-пространстве появляется свойство некоммутативности. Это заставляет задуматься: а является ли полученная математическая структура тем, что мы обычно называем континуумом? Ведь здесь перед нами алгебра, а не геометрия.

Хочу напомнить, что еще в XIX веке Уильям Гамильтон сформулировал перспективную задачу: если есть геометрия как наука о пустом пространстве, то - просто по аналогии - можно представить некую науку о "чистом времени". Более того, он предположил, что алгебра - это и есть такая наука, просто мы не улавливаем в ней скрытую временную специфику, не понимаем - как НА САМОМ ДЕЛЕ в алгебраических уравнениях воплощаются внутренние свойства ВРЕМЕНИ. Открытие некоммутативной алгебры Гамильтоном произошло в результате его попыток смоделировать время в "Теории алгебраических пар чисел", и остается только поражаться интуиции этого великого математика.

Тем не менее, переход от непрерывной континуальности к рядам чисел выглядит проблематично. Здесь подспудно присутствует и некая философская пара-догма: если геометрические отношения воспринимаются как нечто объективно заданное метрикой окружающего Универсума, то числа трактуются как некий продукт нашего ума, склонного к абстракциям и комбинаторике. (По известному афоризму Л.Кронекера: "Натуральные числа создал Бог, а остальные - дело рук человеческих".) Если для физиков квантовая прерывность обоснована ссылками на результаты экспериментов, то для математики никаких "числовых квантов" не существует - любая значимая величина бесконечно делима. Числовая дискретность растворяется в непрерывности, бесконечно малое обращается в нуль.

Странная ситуация сложилась: классический математический анализ формировался на основе классической механики, в современной физике таковая уже является делом прошлого, однако мы все еще строим математические модели на базе представлений стандартного математического анализа и стандартного понимания предела.

Ричард Фейнман в своей книге "Характер физических законов" пишет: "Теория, согласно которой пространство непрерывно, мне кажется неверной, потому что она приводит к бесконечно большим величинам и другим трудностям. Кроме того, она не дает ответа на вопрос о том, чем определяются размеры всех частиц. Я сильно подозреваю, что простые представления геометрии, распространенные на очень маленькие участки пространства, неверны. " (*Richard Feynman, The Character of Physical Law. Русский перевод: Р.Фейнман. Характер физических законов. М.: "Мир", 1968, с. 184.)*

А вот какое примечательное суждение высказано в известной книге Д.Гильберта и П.Барнайся: "На самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временное представление о движении является физически осмысленным также и в случаях произвольно малых пространственных и временных интервалов. Более того, у нас имеются все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению... Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестает быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва ли может быть охарактеризовано как движение" *(Гильберт Д., Барнайс П., "Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики", М., "Наука", 1979, с. 41.).*

Прошу прощения за столь обширное цитирование, оно понадобилось, чтобы обрисовать предпосылки важной проблемы:

1. Существует принципиальное расхождение между современными физическими представлениями о движении и классическими понятиями анализа.

2. Допустима мысль о "математической модели", подходящей для описания микро движения в пределах "недоступного наблюдению порядка величин".

Однако - НА САМОМ ДЕЛЕ - речь надо вести не о МОДЕЛИ, и не о ПОСТРОЕНИИ. Речь идет о том, чтобы внутри самой логики классической математики найти основания для дальнейшего развития теории.

Сейчас принята идеология, которую можно назвать модельным конструктивизмом: математика рассматривается как поставщик абстрактных конструкций для теоретического моделирования результатов физических наблюдений. Как выразился Бертран Рассел: "Математическая концепция дает абстрактную логическую схему, под которую можно подогнать подходящими манипуляциями эмпирический материал..." *(Б.Рассел "Введение в математическую философию", М.: "Гнозис", 1996.с. 101).* Теперь математика - это не язык Логоса, Объективного Духа, а символический язык науки для описания реальности. Сообразно этому, конструируются все более и более абстрактные схемы, математические концепции физиков-теоретиков уходят все дальше и дальше от очевидной понятности, свойственной "математическим началам натуральной философии". Создается впечатление, что абстрактные объекты выступают в роли допотопных слонов и черепах, с помощью которых древние "моделировали" Вселенную...

Но реальное развитие науки идет иначе - я бы назвал этот путь ЛОГОГЕНЕЗОМ. То есть новые сущности "не измышляются", а в естественной логике теории отыскиваются основания, способные развиться в полноценную математическую науку, претендующую на ИСТИННОСТЬ. Если принять этот философский подход, то следует согласиться с Фейнманом - классический анализ НЕ СООТВЕТСТВУЕТ РЕАЛЬНОСТИ, но не потому, что он неверен, а потому, что в его основаниях пока не выявлены логические возможности, позволяющие привести математическую теорию в соответствие с физическими данными.

Однако можно ли перекинуть логический мостик между континуумом и числом? Автор не является профессиональным математиком, не берется утверждать, что классический анализ, созданный Ньютоном и Лейбницем, должен быть дополнен нестандартным анализом, в котором используются гипердействительные актуально бесконечно малые числа. Логическую правомерность нестандартной модели анализа показал в 60-е годы прошлого века Абрахам Робинсон, но до сих пор остается вопросом: "Существуют ли гипердействительные числа в квантово-релятивистской вселенной?" Иными словами, можем ли мы расширять поле действительных чисел только потому, что придумали новые абстрактные объекты, или надо поискать для этого какие-то предметные основания?

Мы только что рассмотрели квартернионное время-пространство, составляющее дополнительную пару с обычным 4-мерным псевдоевклидовым континуумом Минковского. Мы видим как безразмерная единица становится коэффициентом пропорциональности, связывающим вещественную и мнимую оси, как она расщепляется на две размерные константы, - однако математический статус такого расщепления остается совершенно непонятным. Является ли это отражением свойств Унивесума или это только особенность произвольного формального построения?

Произошла странная вещь: обычная числовая ось нами стандартно мыслится как нечто, где на одном конце ноль, а на другом - бесконечность. Где-то "возле" нуля маячит единица. Теперь вдруг единица как-то раздвинулась, освободив место для размерных величин, при этом бесконечность и нуль сомкнулись. Последнее следует пояснить.

Для фиксации движения мы можем использовать только два фундаментальных параметра - единицы времени **t[с]** и пространства **x[м]**. При этом очевидно, что их отношение имеет точное количественное выражение в любом случае: если мы соотносим **x/t** или **t/x**. Стандартное определение покоя - это **0[м/с]**, но одновременно и ∞**[с/м]**, что обычно не учитывается из-за непонятности и ненужности такого количественного выражения. Однако еще Готфрид Лейбниц при создании математического анализа неоднократно размышлял над этим вопросом. Он писал: "Покой может рассматриваться как бесконечно малая скорость или как бесконечно большая медленность" *(Г.В.Лейбниц. Сочинения в четырех томах. Т. 1. М.: "Мысль" с. 205. См. также т. 3, с. 199.).*

У Лейбница есть еще одно примечательное рассуждение: он отождествляет нулевую скорость движения по окружности с бесконечной скоростью, когда "каждая точка окружности должна всегда находиться в одном и том же месте" *(Там же: Т. 3, с. 290).* То есть логически отождествляются не только **0[м/с]** и ∞**[с/м]** (соответственно ∞**[м/с]** и **0[с/м]**), но также **0[с/м]** и ∞**[с/м]** при циклическом движении. То есть шкала величин, на которой лежат значения скорости вращений оказывается как бы замкнутой.

Другая особенность: когда мы строили модель относительных вращений, было сказано, что реальная частота вращения не может быть задана, измеряется только относительное число оборотов, - но тогда такая "реальная частота" может быть любой, сколь угодно большой. Не проще ли было бы сразу начать с реальной единичной частоты в один оборот?

Синхронизация вращающихся систем возникала, когда все вращающиеся радиусы ложились на одну базовую прямую. Легко понять, что мы не можем приписывать выбранной системе отсчета вращения абсолютную частоту в один оборот: тогда уменьшение скорости вращения относительно ее означает невозможность радиуса совпасть с базовой прямой. Иными словами, уменьшение частоты оборотов мы должны отсчитывать от бесконечности! Получается, что мы говорим здесь о вычитании единиц из ∞. Тогда **-1** предстает перед нами не просто как "нечто влево от нуля", а как единица, которую отняли от бесконечного множества...

Впрочем, философствовать здесь можно долго, а простейший вывод из этой теоретической ситуации таков: следует признать, что числа и их алгебраические соотношения - это не просто символический язык для описания пространственных отношений, возникающий из-за введения условных мер и мысленных операций над ними, а столь же фундаментальная объективная сущность, как и само пространство - протяженный континуум. Числа существуют не потому, что мы их придумали для упорядочивания данных опыта, а потому, что мы их ОТКРЫЛИ - также, как открыли в свое время на геометрической плоскости простейшие соотношения между точками и прямыми.

В заключение своей статьи я опишу математический объект, в котором воплощается то, вокруг чего накручивается эта проблематика.

Если мы на числовой прямой будем отмечать точки, соответствующие ряду Фибоначчи, где каждое последующее является суммой двух предыдущих (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...), то в пределе - при устремлении в область все больших и больших чисел - отношение "двух последних" чисел Фибоначчи, как известно, дает **φ**. Это знаменитое иррациональное число 1,61803... , задающее "золотую пропорцию" - сечение, при котором меньший отрезок относится к большему, как больший к их сумме. Можно заявить, что двигаясь так «шагами чисел Фибоначчи» по числовой прямой мы и получаем в трансфинитной области актуально бесконечно большие "отрезки", отношение между которыми выражается иррациональным числом **φ**.

И наоборот, можно в сторону убывания длин построить "в наших масштабах" ряд отрезков, соответствующих "золотому сечению":

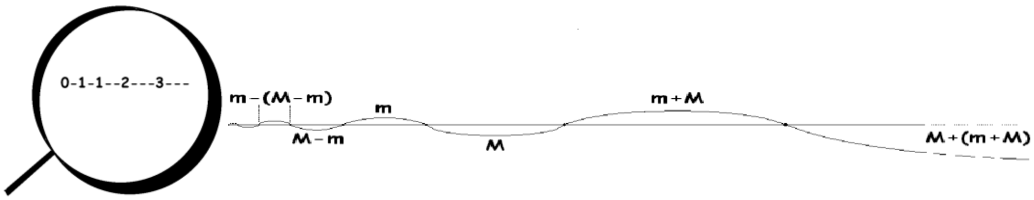


Рис. 6.

Поскольку отношение большего отрезка к соседнему меньшему = 1,6... (то есть больше единицы), их общая длина в сторону убывания будет иметь на прямой вполне определенную предельную точку окончания. В ее окрестности и будут "скучиваться" уменьшающиеся отрезки, которые - в полном соответствии с бесконечной делимостью непрерывного континуума - никогда не перестанут делиться. В этом построении предельная точка никогда и не будет достигнута, однако можно утверждать, что в этой актуально бесконечно малой окрестности возле предельной точки происходит удивительная вещь: вместо непрерывного континуума образуются ЧИСЛА, которые будут идти к предельной точке как уменьшающиеся числа Фибоначчи. А поскольку ряд Фибоначчи начинается 1, 1, 2, 3... , то эти числа (и соответствующие им актуально бесконечно малые гипердействительные длины) благополучно придут в точку предела.

Очевидно, здесь предельный переход понимается несколько иначе, нежели в классическом анализе. Но главное – мы остаемся все-таки в рамках теоретических представлений, мы не измышляем абстракции, а просто расширяем границы того, что считается в математике допустимым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квартернионное время-пространство не является произвольным формально-математическим построением, которое автор придумал, чтобы поговорить на отвлеченные темы. Изменение сигнатуры метрики пространства-времени (---+ вместо +++-) использует, например, упомянутый выше Дж.В.Нарликар, чтобы доказать в конформно-инвариантной теории гравитации положительный знак константы связи $\chi\mathbf{=8\pi G/C^4}$ (**G** – гравитационная постоянная), а с точки зрения многомерного комплексного анализа речь идет всего лишь о 4-х мерных псевдоевклидовых континуумах индексов 1 и 3.

Самым существенным моментом моей работы является попытка объединения числового и пространственного аспектов 4-мерного многообразия в едином Универсуме. В статье нет математических выкладок, - сейчас важно изменение точки зрения, глядя из которой мы можем собрать потом в новую систему известные уже формальные символы. Прежде чем писать уравнения, надо представить - что мы хотим ими выразить. Трудно вообразить квартернионное время-пространство - некое вместилище, "наполненное" не геометрическими точками, а вращательными моментами. Причудливо выглядят фрактально-броуновские метания точки, которая должна двигаться по непрерывной траектории, "натыкаясь" в каждое мгновение времени на вращательный момент. Константа **S**, определяющая минимальный предел **dt/dx**, должна, при формальном объединении парных 4-мерных многообразий, каким-то образом через предельный **0-∞** переход превращаться в **C**. А ведь **C** - это скорость электромагнитных волн, значит речь идет о каком-то конкретном физическом процессе. Короче говоря, автор сейчас может только в общих чертах представлять, к каким результатам приведет развитие предлагаемого подхода...

Вводя квант действия **h**, Макс Планк трагически переживал, что приходится модифицировать формулы со ссылками на эксперимент. Может быть его переживания были небеспочвенны, и квантование можно вывести теоретически - исходя из логических оснований? Я полагаю, что дело обстоит именно так. Мысль Альберта Эйнштейна о том, что устройство реального мира можно понять чисто математическим путем не кажется мне чрезмерно смелой.

Павел Полуян,
polyan2002@mail.ru